TEORI PENDUGAAN STATISTIK

Prof. Dr. Almasdi Syahza, SE., MP
Email: asyahza@yahoo.co.id

1

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - **Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan**
  - Pendugaan Titik Parameter
  - Pendugaan Interval
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - Memilih Ukuran Sampel
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

2

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - **Pendugaan Titik Parameter**
  - Pendugaan Interval
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - Memilih Ukuran Sampel
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

3

PENDUGA TUNGGAL SEBAGAI FUNGSI UNSUR POPULASI

$$S^2 = \frac{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{n(n-1)}$$

$\bar{X}$ **atau S = f(X_1, X_2, …, X_n)**
di mana:

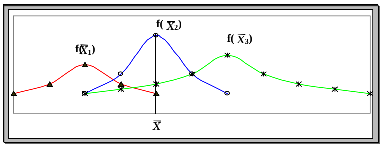
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

Standar deviasi

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X}_x)^2 + \ldots + (X_n - \bar{X})^2\}$$

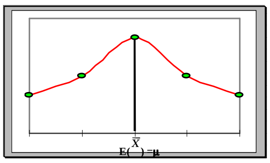


4

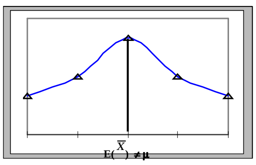
SIFAT-SIFAT PENDUGA

➢ Penduga Tidak Bias

Penduga titik dikatakan tidak bias (*unbiased estimator*) jika di dalam sampel random yang berasal dari populasi, rata-rata atau nilai harapan (*expexted value*, $\bar{X}$) dari statistik sampel sama dengan parameter populasi (μ) atau dapat dilambangkan dengan E( ) = μ.



Gambar A Penduga Bersifat Tidak Bias



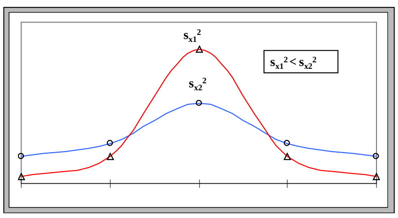
Gambar B Penduga Bersifat Bias

5

SIFAT-SIFAT PENDUGA

➢ Penduga Efisien

Penduga yang efisien (*efficient estimator*) adalah penduga yang tidak bias dan mempunyai varians terkecil (s_x^2) dari penduga-penduga lainnya.

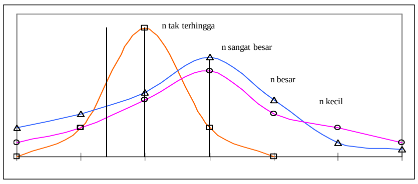


6

DEFINISI

➢ Penduga Konsisten

Penduga yang konsisten (*consistent estimator*) adalah nilai dugaan ($\bar{x}$) yang semakin mendekati nilai yang sebenarnya μ dengan semakin bertambahnya jumlah sampel (n).



7

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - Pendugaan Titik Parameter
  - **Pendugaan Interval**
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - Memilih Ukuran Sampel
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

8

DEFINISI

Pendugaan interval:

Pendugaan interval adalah menyatakan jarak di dalam mana suatu parameter populasi mungkin berada.

9

RUMUS INTERVAL PENDUGAAN

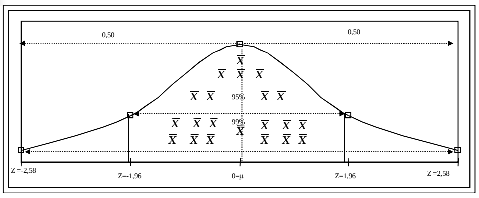
$$(s - Zs_x < P < s + Zs_x) = C$$

Di mana:

S	: Statistik yang merupakan penduga parameter populasi (P)
P	: Parameter populasi yang tidak diketahui
s_x	: Standar deviasi distribusi sampel statistik
Z	: Suatu nilai yang ditentukan oleh probabilitas yang berhubungan dengan pendugaan interval, nilai Z diperoleh dari tabel luas di bawah kurva normal
C	: Probabilitas atau tingkat keyakinan yang dalam praktek sudah ditentukan dahulu.
$s - Zs_x$	: Nilai batas bawah keyakinan
$s + Zs_x$	: Nilai batas atas keyakinan

10

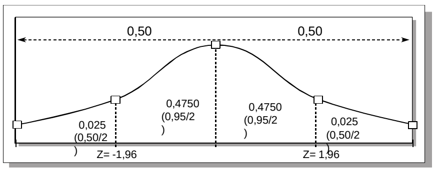
CONTOH MENENTUKAN JUMLAH SAMPEL SETIAP STRATUM



Pada gambar terlihat untuk interval keyakinan 95% terhubungkan dengan nilai Z antara –1,96 sampai 1,96. Ini dapat diartikan juga bahwa 95% dari rata-rata hitung sampel $\overline{X}$ akan terletak di dalam ± 1,96 kali standar deviasinya. Sedangkan untuk keyakinan 99%, maka rata-rata hitungnya juga akan terletak di dalam ± 2,58 kali standar deviasinya. Interval keyakinan juga dapat dituliskan untuk C= 0,95 adalah $\mu \pm 1{,}96\sigma_x$ dan untuk C=0,99 adalah $\mu \pm 2{,}58s_x$.

11

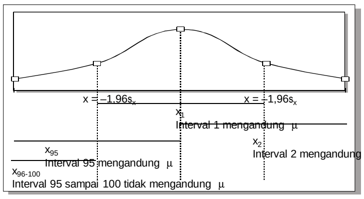
CONTOH MENENTUKAN JUMLAH SAMPEL SETIAP STRATUM



Luas kurva adalah 1, dan simetris yaitu sisi kanan dan kiri luasnya sama yaitu 0,5. Nilai C= 0,95 apabila dibagi menjadi dua bagian simetris maka menjadi 0,4750 yang diperoleh dari 0,95/2. Apabila digunakan tabel luas di bawah kurva normal untuk probabilitas 0,4750 maka akan diperoleh nilai Z sebesar 1,96. Begitu juga untuk C= 0,99, maka probabilitasnya adalah 0,99/2 = 0,4950, nilai probabilitas ini terhubung dengan nilai Z= 2,58. Setelah menemukan nilai Z dan standar deviasinya, maka dapat dibuat interval keyakinan dengan mudah misalnya untuk C= 0,95 adalah $P(-1{,}96s_x < m < +1{,}96s_x) = 0{,}95$ sedang untuk C= 0,99 adalah $P(\overline{X} - 2{,}58s_x < \mu < \overline{X} + 2{,}58s_x) = 0{,}99$.

12

CONTOH MENENTUKAN JUMLAH SAMPEL SETIAP STRATUM



Pada gambar di atas terlihat bahwa interval 1 dengan nilai rata-rata $\bar{X}$ interval 95 dengan rata-rata $\bar{X}$ 95 mengandung nilai parameternya yaitu dan hanya $\bar{X}$ 96 sampai $\bar{X}$ 100 atau 5% interval saja yang tidak dari statistik mengandung μ. Jadi interval keyakinan C= 95 dapat diartikan bahwa sebanyak 95% interval $\bar{X}$ mengandung nilai parameter aslinya yaitu μ dan hanya 5% interval saja yang tidak mengandung parameternya.

13

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - Pendugaan Titik Parameter
  - Pendugaan Interval
  - **Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel**
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - Memilih Ukuran Sampel
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

14

DEFINISI

Kesalahan standar dari rata-rata hitung sampel adalah standar deviasi distribusi sampel dari rata-rata hitung sampel. Kesalahan standar dari rata-rata hitung dihitung dengan rumus sebagai berikut:

Untuk populasi yang tidak terbatas n/N < 0,05:

$$s_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

untuk populasi yang terbatas dan n/N> 0,05:

$$s_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Di mana:
σ : Standar deviasi populasi
s_x : Standar error / kesalahan standar dari rata-rata hitung sampel
n : Jumlah atau ukuran sampel
N : Jumlah atau ukuran populasi

15

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - Pendugaan Titik Parameter
  - Pendugaan Interval
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - **Menyusun Interval Keyakinan**
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - Memilih Ukuran Sampel
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

16

CONTOH INTERVAL KEYAKINAN RATA-RATA HITUNG

Interval keyakinan untuk rata-rata hitung dirumuskan

$\boxed{\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} s/\sqrt{n}}$

Untuk populasi yang terbatas, faktor koreksi menjadi $\sqrt{(N-n)/N-1}$. Nilai $\bar{x}$ merupakan rata-rata dari sampel, sedangkan nilai Z untuk beberapa nilai C

Tingkat Keyakinan	C/2	Nilai Terdekat	Nilai Z
0,99	0,495	0,4951	2,58
0,98	0,49	0,4901	2,33
0,95	0,475	0,475	1,96
0,9	0,45	0,4505	1,65
0,85	0,425	0,4251	1,44
0,8	0,4	0,3997	1,28

17

CONTOH INTERVAL KEYAKINAN RATA-RATA HITUNG

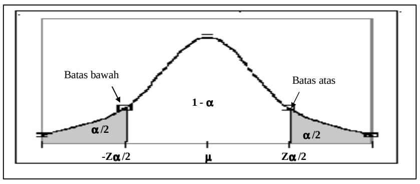
Berdasarkan pada nilai Z dan diasumsikan bahwa n>30 maka dapat disusun interval beberapa keyakinan sebagai berikut:

1. Interval keyakinan 99%: $\bar{x} \pm 2,58\ s/\sqrt{n}$
2. Interval keyakinan 98%: $\bar{x} \pm 2,33\ s/\sqrt{n}$
3. Interval keyakinan 95%: $\bar{x} \pm 1,96\ s/\sqrt{n}$
4. Interval keyakinan 90%: $\bar{x} \pm 1,65\ s/\sqrt{n}$
5. Interval keyakinan 85%: $\bar{x} \pm 1,44\ s/\sqrt{n}$
6. Interval keyakinan 95%: $\bar{x} \pm 1,28\ s/\sqrt{n}$

18

CONTOH INTERVAL KEYAKINAN RATA-RATA HITUNG

Interval keyakinan tersebut dapat juga digambarkan sebagai berikut:



Nilai parameter yang sebenarnya diharapkan adan terdapat pada interval 1 - α dengan batas bawah -Zα /2 dan batas atas Zα /2.

19

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - Pendugaan Titik Parameter
  - Pendugaan Interval
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - Memilih Ukuran Sampel
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

20

SKEMA PROSES INTERVAL KEYAKINAN

Mulai Identifikasi masalah → Menentukan sampel (n) dan nilai rata-rata $\overline{X}$ → Menentukan Keyakinan(C atau α= (1 – C) dan Nilai Z

↑ Populasi Tidak Terbatas: $\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$

↓ Populasi Terbatas: $\overline{x} \pm Z_{\alpha/2}\, s/\sqrt{(N - n)/N-1}$

21

DISTRIBUSI NORMAL DAN STANDAR DEVIASI POPULASI DIKETAHUI

Probabilitas ($\bar{x} - Z_{\alpha/2}\,\sigma_x < \mu <$ ($\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\, s/\sqrt{}(N - n)/N - 1n\ s_x$) = C
atau Probabilitas ($\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\, s_x$) = C

Di mana:
$\bar{x}$: Rata-rata dari sampel
$Z_{\alpha/2}$: Nilai Z dari tingkat kepercayaan α
μ : Rata-rata populasi yang diduga
σ_x : Standar error / kesalahan standar dari rata-rata hitung sampel
C : Tingkat keyakinan
$\alpha = (1 - C)$

22

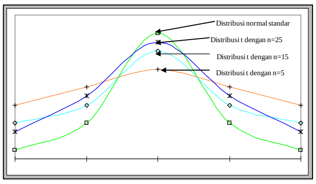
DISTRIBUSI NORMAL DAN STANDAR DEVIASI POPULASI TIDAK DIKETAHUI

Standar error untuk populasi tidak terbatas

$$S_{x} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Standar error untuk populasi yang terbatas dan n/N > 0,05:

$$S_{x} = \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$



23

DISTRIBUSI SAMPLING MENDEKATI NORMAL DAN STANDAR DEVIASI POPULASI TIDAK DIKETAHUI

$$\boxed{(\ \bar{x} - t_{\alpha/2}\, s_x < \mu < (\bar{x} + t_{\alpha/2}\, s_x\ )}$$

Di mana:

$\bar{x}$: Rata-rata dari sampel
$t_{\alpha/2}$: Nilai t dari tingkat kepercayaan α
μ : Rata-rata populasi yang diduga
s_x : Standar error/kesalahan standar dari rata-rata hitung sampel
C : Tingkat keyakinan
α : 1 – C

24

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - Pendugaan Titik Parameter
  - Pendugaan Interval
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - **Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi**
  - Memilih Ukuran Sampel
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

25

CONTOH MENGHITUNG RETURN ON ASSET

Untuk populasi yang tidak terbatas

$$Sp = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Untuk populasi yang terbatas

$$Sp = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}$$

Bentuk pendugaan proporsi populasi dirumuskan sebagai berikut:

Probabilitas ($p - Z_{\alpha/2}.Sp < P < p + Z_{\alpha/2}.Sp$)

Di mana:

p : Proporsi sampel
$Z_{\alpha/2}$: Nilai Z dari tingkat keyakinan α
P :Proporsi populasi yang diduga
S_p : Standar error/kesalahan dari proporsi
C :Tingkat keyakinan
α :1 – C

26

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - Pendugaan Titik Parameter
  - Pendugaan Interval
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - **Memilih Ukuran Sampel**
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

27

INTERVAL KEYAKINAN UNTUK SELISIH RATA-RATA

Probabilitas

$((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\alpha/2} . \sigma_{x1-x2}) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\alpha/2} . \sigma_{x1-x2})$

Di mana standar error dari nilai selisih rata-rata adalah:

$$\sigma_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{x_1}^{2}}{n_1} + \frac{\sigma_{x_2}^{2}}{n_2}}$$

Apabila standar deviasi dari populasi tidak ada, maka dapat diduga dengan standar deviasi sampel yaitu:
Di mana:

$$s_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{s_{x_1}^{2}}{n_1} + \frac{s_{x_2}^{2}}{n_2}}$$

σ_{x1-x2} : Standar deviasi selisih rata-rata populasi
s_{x1-x2} : Standar error selisih rata-rata
s_{x1}, s_{x1}: Standar deviasi sampel dari dua populasi
n_1, n_2: Jumlah sampel setiap populasi

28

INTERVAL KEYAKINAN UNTUK SELISIH PROPORSI

Probabilitas

Probabilitas $((p_1-p_2) - Z_{\alpha/2} . s_{p1-p2}) < (P_1-P_2) < (p_1-p_2) + Z_{\alpha/2} . s_{p1-p2})$

Di mana standar error dari nilai selisih proporsi adalah:

$$s_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1 - 1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2 - 1}}$$

p_1, p_2 : Proporsi sampel dari dua populasi
S_{p1}, s_{p1}: Standar error selisih proporsi dari dua populasi
n_1, n_2 : Jumlah sampel setiap populasi

29

OUTLINE

Bagian I Statistik Induktif

- Metode dan Distribusi Sampling
- **Teori Pendugaan Statistik**
  - Pengertian Teori dan Kegunaan Pendugaan
  - Pendugaan Titik Parameter
  - Pendugaan Interval
  - Kesalahan Standar dari Rata-rata Hitung Sampel
  - Menyusun Interval Keyakinan
  - Interval Keyakinan Rata-rata dan Proporsi
  - Interval Keyakinan Selisih Rata-rata dan Proporsi
  - **Memilih Ukuran Sampel**
- Pengujian Hipotesa Sampel Besar
- Pengujian Hipotesa Sampel Kecil
- Analisis Regresi dan Korelasi Linier
- Analisis Regresi dan Korelasi Berganda
- Konsep Dasar Persamaan Simultan

30

FAKTOR UKURAN SAMPEL

Faktor yang mempengaruhi jumlah sampel

1. Tingkat keyakinan yang dipilih.
2. Kesalahan maksimum yang diperbolehkan.
3. Variasi dari populasi.

31

RUMUS JUMLAH SAMPEL UNTUK MENDUGA RATA-RATA POPULASI

Rumus jumlah sampel dalam populasi dirumuskan sebagai berikut:

$$n = [(Z_{\alpha/2}.\sigma)/\varepsilon]^2$$

Rumus tersebut diturunkan dari interval keyakinan sebagaimana diuraikan sebagai berikut:

$P\ (-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}\ ) = C = 1 - \alpha$

$(-Z_{\alpha/2} < (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < Z_{\alpha/2})$

$(-Z_{\alpha/2}\ (\sigma/\sqrt{n}) < (\bar{x} - \mu) < Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n}))$

$(x - \mu) < Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$; ingat bahwa error $\varepsilon = \bar{x} - \mu$

$\varepsilon < Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$;

$\varepsilon^2 = (Z_{\alpha/2})^2(\sigma^2/n)$;

$n = [(Z_{\alpha/2}.\sigma)/\varepsilon]^2$

32

RUMUS JUMLAH SAMPEL UNTUK MENDUGA RATA-RATA PROPORSI POPULASI

Untuk mendapatkan rumus jumlah sampel dalam pendugaan proporsi populasi dapat diturunkan sebagai berikut:

$P\ (-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}\ ) = C = 1 - \alpha$

$(-Z_{\alpha/2} < (p_1 - p_2)/(\sigma/\sqrt{n}) < Z_{\alpha/2})$

$(-Z_{\alpha/2}(\sqrt{[(p(1 - p)]/n - 1}) < (p_1 - p_2) < Z_{\alpha/2}(\sqrt{[p(1 - p)]/n - 1})$

$(p1 - p2) < Z_{\alpha/2}(\sqrt{[(p(1 - p)]/n - 1})$; ingat bahwa *error* $\varepsilon = p_1 - p_2$

$\varepsilon < Z_{\alpha/2}(\sqrt{[(p(1 - p)]/n - 1})$; dikuadratkan kedua sisi menjadi

$\varepsilon^2 = (Z_{\alpha/2})^2[(p(1 - p)]/n - 1$; dipindahkan $n - 1$ ke sisi kiri

$n - 1 = \frac{(Z_{\alpha/2}.)^2\ p(1 - p)}{\varepsilon^2}$ sehingga n menjadi

$$n = \frac{(Z_{\alpha/2}.)^2\ p(1 - p) + 1}{\varepsilon^2}$$

33

TERIMA KASIH

34